



“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书 67

偏微分方程数值解法

陈艳萍 鲁祖亮 刘利斌 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书试图用较少的篇幅描述偏微分方程的几种数值方法. 主要内容包括: Sobolev 空间初步, 椭圆边值问题的变分问题, 椭圆问题的有限差分方法, 抛物型方程的有限差分方法, 双曲型方程的有限差分方法, 椭圆型方程的有限元方法, 抛物及双曲方程的有限元方法, 椭圆型方程的混合有限元方法, 谱方法等. 本书内容丰富, 深入浅出, 尽可能地用简单的方法来描述一些理论结果, 并根据作者对有限差分、有限元、混合有限元、谱方法的理解和研究生教学要求, 全面、客观地评价各种数值计算方法, 并列举一些数值计算的例子, 阐述许多新的学术观点.

本书可作为高等学校数学系高年级本科生和研究生的教材或参考书, 也可作为计算数学工作者和从事科学与工程计算的科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/陈艳萍, 鲁祖亮, 刘利斌编著. —北京: 科学出版社, 2015.1

(信息与计算科学丛书 67)

ISBN 978-7-03-000000-0

I. ①偏… II. ①陈… ②鲁… ③刘… III. ① IV. ①

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 000000 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 肖 钦 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2015 年 1 月第一次印刷 印张: 14

字数: 280 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

科学与工程领域中的许多问题都可用偏微分方程来描述, 这些具有实际应用背景的偏微分方程中只有很少一部分可以求出解析解, 而绝大多数方程只能通过近似方法, 并利用计算机进行求解. 近年来, 随着计算机的不断更新和数值方法的飞速发展, 科学计算及其理论研究已成为现代科学研究的主要手段.

当今科学计算已经广泛渗透到很多专业领域中, 形成了许多新的学科分支, 如计算流体力学、计算化学、计算生物学、计算材料科学等, 而计算数学是联系它们的纽带和基础. 因此, 计算数学工作者和其他理工科专业的科技工作者都需要学习和掌握偏微分方程数值解法知识, 以便结合自身专业开展与科学计算相关的工作.

本书试图用较少的篇幅描述偏微分方程的几种数值方法. 其主要内容包括: Sobolev 空间初步, 椭圆边值问题的变分问题, 椭圆问题的有限差分方法, 抛物型方程的有限差分方法, 双曲型方程的有限差分方法, 椭圆型方程的有限元方法, 抛物及双曲方程的有限元方法, 椭圆型方程的混合有限元方法, 谱方法等. 本书内容丰富, 深入浅出, 尽可能地用简单的方法来描述一些理论结果, 并根据作者对有限差分、有限元、混合有限元、谱方法的理解和研究生教学要求, 全面、客观地评价各种数值计算方法, 并列举一些数值计算的例子, 阐述许多新的学术观点. 各章内容充实, 例题选题灵活, 题型丰富, 覆盖面广, 并配有习题.

本书同以前的教材最明显的区别, 就是不以简单化和概念化的写法去介绍各种偏微分方程数值解法, 而是尽可能站在学术研究的前沿, 全面、客观地去评价各种方法, 阐述了许多新的学术观点. 本书尽量以朴实、鲜活的语言, 把原本十分复杂、枯燥的数学内容, 以生动而简明的形式来描述, 达到学术性、严肃性、通俗性的完美结合. 书中对于任何超越大学课程的内容, 都尽量给出较为详实的说明. 对一般的定理一般不给出证明, 但是对于一些重要的定理, 本书则给出较为简单的证明. 本书也给出了主要的参考文献, 有兴趣的读者可以在其中找到更为全面的证明.

本书可作为高等学校数学及理工科专业高年级本科生和研究生的教材或参考书, 也可作为高校教师、计算数学工作者和从事科学与工程计算的科研人员的参考书, 对报考计算数学专业研究生的读者也具有一定的参考价值.

限于编者水平, 同时编写时间也比较仓促, 不妥之处在所难免, 希望广大读者提出宝贵的批评和修改意见.

目 录

《信息与计算科学丛书》序

前言

第 1 章 引言	1
1.1 预备知识	1
1.1.1 符号说明	1
1.1.2 泛函基础知识	3
1.2 Sobolev 空间初步	5
1.2.1 广义导数	5
1.2.2 Sobolev 空间的定义	6
1.2.3 嵌入定理	8
1.2.4 迹定理	10
1.2.5 等价模定理	13
1.3 习题	14
第 2 章 椭圆型方程边值问题	15
2.1 Lax-Milgram 定理	15
2.2 变分形式及解的存在唯一性	16
2.2.1 Dirichlet 问题	16
2.2.2 Neumann 边值问题	18
2.2.3 混合边值问题	20
2.2.4 双调和方程	22
2.3 正则性	23
2.4 习题	24
第 3 章 椭圆型方程的有限差分方法	26
3.1 有限差分法的基础	26
3.1.1 网格剖分	26
3.1.2 有限差分近似的基本概念	27
3.2 一维两点边值问题的有限差分方法	29
3.3 二维椭圆型方程的有限差分方法	31
3.3.1 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题	31
3.3.2 Poisson 方程的 Neumann 边值问题	36

3.3.3	一般的二阶线性椭圆问题的差分格式	38
3.3.4	双调和问题的差分格式	40
3.4	差分方程解的唯一性和收敛性	40
3.4.1	差分方程解的存在唯一性	41
3.4.2	差分方程解的收敛性	42
3.5	习题	45
第 4 章	抛物型方程的有限差分方法	47
4.1	一维抛物型方程的有限差分格式	47
4.1.1	一维常系数抛物型方程的 Dirichlet 初边值问题	48
4.1.2	一维常系数抛物型方程的混合边值问题	52
4.2	差分格式的稳定性 and 收敛性	54
4.2.1	基本概念	54
4.2.2	判别稳定性的直接法	56
4.2.3	判别稳定性的分离变量法	57
4.2.4	稳定性与收敛性的关系	60
4.3	二维抛物型方程的有限差分格式	61
4.3.1	二维古典差分格式	61
4.3.2	交替方程隐式差分格式	63
4.4	习题	64
第 5 章	双曲型方程的有限差分法	67
5.1	一维一阶线性双曲型方程的差分格式	67
5.1.1	双曲型方程的初值问题	67
5.1.2	双曲型方程的初边值问题	71
5.2	一维二阶线性双曲型方程的差分方法	73
5.2.1	显式差分格式	73
5.2.2	隐式差分格式	73
5.2.3	初边值条件的离散	74
5.3	二维二阶双曲型方程的有限差分格式	75
5.3.1	显式差分格式	76
5.3.2	交替方向隐式差分格式	77
5.4	习题	78
第 6 章	椭圆型方程边值问题的有限元法	80
6.1	两点边值问题的有限元法	80
6.1.1	Galerkin 方法与 Ritz 方法	80
6.1.2	两点边值问题的线性有限元方法	86

6.1.3	两点边值问题的线性有限元解的误差估计	97
6.2	两点边值问题的高次有限元方法	102
6.2.1	二次元	102
6.2.2	三次元	103
6.3	二维椭圆问题的有限元方法	105
6.3.1	二维椭圆问题	105
6.3.2	二维椭圆问题的有限元逼近格式	105
6.3.3	数值例子	118
6.4	习题	121
第 7 章	抛物及双曲方程的有限元方法	124
7.1	抛物型方程的有限元方法	124
7.1.1	半离散有限元逼近	126
7.1.2	全离散有限元逼近	130
7.2	双曲型方程的有限元方法	134
7.2.1	半离散有限元逼近	135
7.2.2	全离散有限元逼近	137
7.3	习题	144
第 8 章	椭圆问题的混合有限元方法	145
8.1	混合有限元基本理论	145
8.1.1	基本概念	145
8.1.2	混合变分形式	148
8.1.3	Babuska-Brezzi 理论	149
8.2	二阶椭圆方程的混合有限元方法	154
8.2.1	线性椭圆方程的混合有限元方法	154
8.2.2	拟线性椭圆方程的混合有限元方法	163
8.2.3	线性椭圆方程的超收敛分析	165
8.2.4	线性椭圆方程的后验误差估计	169
8.3	习题	175
第 9 章	谱方法	176
9.1	正交多项式	176
9.1.1	正交多项式的定义	176
9.1.2	Gauss 型求积公式	177
9.2	Jacobi 正交多项式	180
9.3	Legendre 正交多项式	183
9.4	Chebyshev 正交多项式	185

9.5 谱方法的一般形式	185
9.5.1 变分形式的导出	185
9.5.2 谱逼近的一般形式	188
9.6 Galerkin 方法	190
9.6.1 数值格式的导出	190
9.6.2 稳定性和收敛性	191
9.7 配置法	193
9.7.1 数值格式的导出	193
9.7.2 稳定性和收敛性	195
9.8 Volterra 型积分方程的谱配置法	200
9.8.1 Volterra 积分方程的 Legendre 谱配置法	200
9.8.2 弱奇性 Volterra 积分方程的 Jacobi 谱配置法	202
9.8.3 Volterra 积分微分方程的 Legendre 谱配置法	203
9.9 习题	204
参考文献	207
索引	208
《信息与计算科学丛书》已出版书目	211